

Tanım: (Kosullu Olasılılık Yoğunluk Fonksiyonu)

$S$  örnekle uzayında tanımlı  $(X, Y)$  t.d. leri  $f(x, y)$  ortak olasılıklı yoğ. fonksiyonuna sahip olsun.  $X$ 'in  $g(x)$  ve  $Y$ 'nin  $h(y)$  marginal yoğunluk fonksiyonları olsun. İki tane,

a)  $Y=y$  verilmişken  $X$ 'in koşullu o.y.f.'si

$$g(x|Y=y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

b)  $X=x$  verilmişken  $Y$ 'nin koşullu o.y.f.'nu

$$h(y|X=x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

*Örneklerle tanımlanır.*

Örnek:  $(X, Y)$  iki boyutlu sürekli t.d. nin o.o.y.f.'si,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} (6-x-y), & 0 < x \leq 2 \\ & 2 < y \leq 4 \\ 0, & \text{d.h.} \end{cases}$$

olsun.

a)  $P(X \leq 1, Y \leq 3) = ?$

b)  $P(X + Y \leq 3) = ?$

c)  $P(X \leq 1 | Y \leq 3) = ?$

~~Çözüm~~ d)  $X$  ve  $Y$ 'nin Marginal yoğ. f. leri

e)  $X, Y$  nin Dağılım fonk. nusu

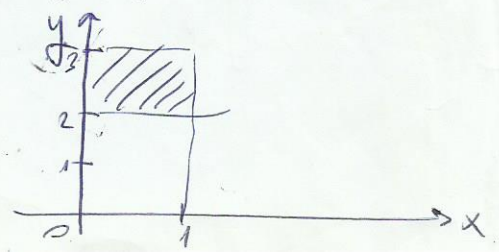
f)  $F(x)$  yardımıyla

g)  $P(0 < X \leq 1, 3 \leq Y \leq 4) = ?$

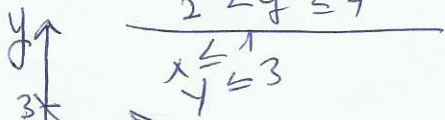
Çözüm a)  $P(X \leq 1, Y \leq 3) = \int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{8} (6y - xy - \frac{y^2}{2}) \Big|_2^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{8} (\frac{7}{2} - x) dx$$

$$= \frac{7}{16} x - \frac{x^2}{16} \Big|_0^1 = \frac{3}{8} //$$



$$b.) P(X+Y \leq 3) = \int_{x=0}^1 \int_{y=2}^{3-x} f(x,y) dy dx \quad \begin{matrix} (0 < x \leq 2) \\ (2 < y \leq 4) \end{matrix}$$



$$= \int_0^1 \int_2^{3-x} \frac{1}{f} (6-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{f} \left( 6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=2}^{3-x} dx$$

$$= \frac{5}{24} //$$

$$c.) P(X \leq 1 | Y \leq 3) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 3)}{P(Y \leq 3)}$$

burada;  $P(Y \leq 3) = P(0 < x \leq 2, Y \leq 3)$ .

$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^3 \frac{1}{f} (6-x-y) dy dx = \frac{5}{f}$$

$$\Rightarrow P(X \leq 1 | Y \leq 3) = \frac{3/f}{5/f} = \frac{3}{5} // \text{ olur}$$

$$d.) g(x) = \int_{y=2}^4 \frac{1}{f} (6-x-y) dy$$

$$= \frac{1}{f} \cdot \left( 6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=2}^4$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (3-x) //$$

Günder  $h(y) = \int_{x=0}^2 \frac{1}{f} \cdot (6-x-y) dx = \frac{1}{4} \cdot (5-y) //$

e.) Dağılım fonk,  
 $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv$

$$= \int_0^x \int_2^y \frac{1}{f} (6-u-v) du dv$$

$$= \frac{1}{16} \cdot x \cdot (y-2) \cdot (10-x-y) , \quad \begin{matrix} 0 < x \leq 2 \\ 2 < y \leq 4 \end{matrix}$$

olur.

$F(x)$  yardımıyla

$$f) p(0 < x \leq 1, 3 \leq y \leq 4) \\ = F(1,4) - F(0,4) - F(1,3) \\ + F(0,3)$$

burada,

$$F(1,4) = \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot (4-2) \cdot (10-1-4) \\ = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{5}{8} "$$

$$F(0,4) = \frac{1}{16} \cdot 0 = 0 "$$

$$F(1,3) = \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot (3-2) \cdot (10-1-3) \\ = \frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{3}{8} "$$

$$F(0,3) = \frac{1}{16} \cdot 0 = 0 "$$

$$\Rightarrow p(0 < x \leq 1, 3 \leq y \leq 4)$$

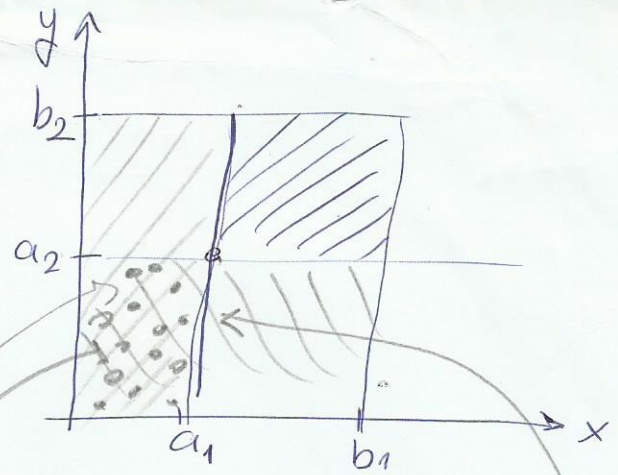
$$= \frac{5}{8} - 0 - \frac{3}{8} - 0 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Bir kovanın 2 Beyaz ve 4 siyah top vardır. Yerine koymaksızın iki top rasgele çekiliyor. Çekilen topların ortak olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: İki topun çekilmesi örneğinde  $x$  ve  $y$  t.d. leri için

$x=0$	ilk top	Beyaz
$x=1$	"	siyah
$y=0$	ikinci	Beyaz
$y=1$	"	siyah

Bu durumda  $x$  ve  $y$  t.d. leri için ortak olasılık fonksiyonu şöyle düzenlenir.



$$p(a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2) \\ = p(x \leq b_1, y \leq b_2) \\ - p(x \leq a_1, y \leq b_2) \\ - p(x \leq b_1, y \leq a_2) \\ + p(x \leq a_1, y \leq a_2) - \text{iki} \\ \text{ker} \\ \text{çıktı.} \\ \text{0 yuzden} \\ \text{1'ten} \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) \\ - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \\ \text{yazılır.}$$

$X \setminus Y$	$Y=0$	$1$	$P(X=x)$
$X=0$	$\frac{2}{6} \cdot (\frac{1}{5})$	$\frac{2}{6} \cdot (\frac{4}{5})$	$\frac{10}{30}$
$1$	$\frac{4}{6} \cdot (\frac{2}{5})$	$\frac{4}{6} \cdot (\frac{3}{5})$	$\frac{20}{30}$
$P(Y=y)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{20}{30}$	$1$

iki yada daha çok olayın bağımsızlığı daha önce tanımlanmış idi. Fikr,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ise A ve B olayları bağımsızdır.

Örnekte; A olayı  $X=0$  ve B "  $Y=0$

olsun. Bu halde yukarıdaki tablodan,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} \neq P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

0 halde A ve B olayları bağımsız değildir.

1.1. Tanım:  $(X, Y)$   $S$  örnekle uzayında tanımlı iki boyutlu  $n$  kişilik t.d. olsun.

$(x_i, y_j)$   $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $(X, Y)$ 'nin mümkün sonuçları ise  $X$  ve  $Y$  t.d. lerinin bağımsız olması için gerekli ve yeter koşul

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j) \dots (10)$$

olmalıdır. Tanım:  $(X, Y)$  iki boyutlu sürekli t.d. olsun.  $X$  ve  $Y$ 'nin  $S$  örnekle uzayında bağımsız olması için gerekli ve yeter koşul, tüm  $(x, y)$  değerleri için

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \dots (11)$$

yaftılabiliridir. Burada  $f$ , ~~ort~~ o.o.y.f,  $g(x)$  ve  $h(y)$  ise sırasıyla  $X$  ve  $Y$  t.d. lerinin marjinal yoğunluk fonksiyonlarıdır.